Prefácio

A data é 13 de maio de 1832. Na névoa da alvorada, dois jovens franceses se encaram, pistolas em punho, em duelo por causa de uma mulher. O tiro é disparado, e um dos homens tomba no chão, mortalmente ferido. Ele morre duas semanas depois, de peritonite, aos 21 anos, sendo enterrado numa vala comum – uma sepultura não identificada. Uma das mais importantes ideias da história da matemática e da ciência quase morre com ele.

O duelista que sobreviveu continua desconhecido. O que morreu era Évariste Galois, revolucionário político e matemático obsessivo cujos trabalhos reunidos ocupam apenas seis páginas. Mas o legado que transmitiu revolucionou a matemática. Galois inventou uma linguagem que descreve a simetria nas estruturas matemáticas e deduz as suas consequências.

Conhecida como "teoria de grupo", hoje essa linguagem é usada tanto na matemática pura quanto na aplicada, na qual regula a formação dos padrões do mundo natural. A simetria também tem papel central nas fronteiras da física, no mundo quântico do muito pequeno e no mundo relativístico do muito grande. Pode até fornecer uma rota para a tão procurada "teoria dos grupos", uma unificação matemática dos principais campos da física moderna. E tudo começou com uma simples questão algébrica, sobre a resolução de equações matemáticas – encontrar uma "incógnita" a partir de algumas indicações matemáticas.

Simetria não é um número nem um formato, é um tipo especial de *transformação* – uma maneira de mover um objeto. Se o objeto parecer o mesmo depois de movido, a transformação aí presente é uma simetria. Por exemplo, um quadrado continua um quadrado se for rotado em um ângulo reto.

Essa ideia, muito desenvolvida e embelezada, é básica na atual compreensão científica do Universo e suas origens. No cerne da teoria da relatividade, de Albert Einstein, encontra-se o princípio de que as leis da física devem ser as mesmas em todos os lugares e em todos os tempos. Ou seja, as leis devem ser simétricas em relação ao movimento no espaço e à passagem do tempo. A física quântica nos diz que tudo no Universo é construído a partir de uma coleção de partículas "fundamentais". O comportamento dessas partículas é regido por equações matemáticas – "leis da natureza" –, e essas leis também têm uma simetria. Partículas podem se transformar matematicamente em outras bem diferentes, e essas transformações também não alteram as leis da física.

Esses conceitos, e outros mais recentes, nas fronteiras da física atual, não poderiam ter sido descobertos sem uma profunda compreensão matemática da simetria. Essa compreensão veio da matemática pura; seu papel na física só surgiu depois. Ideias extraordinariamente úteis podem sair de considerações apenas abstratas – algo a que o físico Eugene Wigner se refere como "a eficiência não razoável da matemática nas ciências naturais". Na matemática, às vezes parece que os ganhos são bem maiores que o investimento.

Começando pelos escribas da antiga Babilônia e terminando com os físicos do século XXI, *Uma história da simetria na matemática* mostra como a matemática tropeçou com o conceito de simetria e como a busca aparentemente inútil do que parecia uma fórmula impossível abriu um novo horizonte para o Universo, revolucionando a ciência e a matemática. De uma maneira mais abrangente, a história da simetria ilustra como as influências culturais e a continuidade histórica de grandes ideias podem ganhar destaque por conta de sublevações ocasionais, tanto políticas quanto científicas.

A PRIMEIRA METADE deste livro aparentemente não tem nada a ver com simetria e muito pouco a ver com o mundo natural. A razão disso é que a simetria não se tornou uma ideia dominante pelo caminho esperável: a geometria. O belo e indispensável conceito da simetria que os matemáticos e físicos usam hoje chegou pela álgebra. Boa parte deste livro, portanto, descreve a busca de solução de equações algébricas. Isso pode soar muito técnico, mas a procura foi envolvente, e muitos dos principais atores tiveram vidas incomuns e dramáticas. Os matemáticos são seres humanos, embora costumem se perder em pensamentos abstratos. Talvez alguns tenham deixado a lógica dominar demais suas vidas, mas muitas vezes observaremos que nossos heróis podiam ser até humanos demais. Vamos ver como eles viveram e morreram, vamos ler sobre duelos e casos amorosos, terríveis disputas sobre primazia, escândalos sexuais, bebedeiras e doenças. Ao longo do caminho, veremos como suas ideias matemáticas se desenvolveram e mudaram o mundo.

Iniciada no século X AEC* e atingindo o clímax com Galois, no começo do século XIX, a narrativa segue passo a passo o desvendamento das equações – processo que afinal estancou quando os matemáticos tentaram desvelar as chamadas equações "quínticas", que envolvem a quinta potência de um número desconhecido, ou incógnita. Será que o método se desfez por haver algo fundamentalmente diferente nas equações quínticas? Ou haverá métodos semelhantes, ainda mais poderosos, que levem as fórmulas a uma solução? Será que os matemáticos empacaram por causa de um obstáculo genuíno ou simplesmente eram obtusos?

É importante compreender que já se sabia da existência de soluções para as equações quínticas. A questão era: será que essas soluções podiam ser sempre representadas por uma fórmula algébrica? Em 1821, o jovem norueguês Niels Henrik Abel demonstrou que a equação quíntica não pode ser resolvida de forma algébrica. Sua demonstração, porém, foi indireta e bem misteriosa. Ele provou que nenhuma solução geral é possível, mas não explicou realmente *por quê*.

Évariste Galois descobriu que a impossibilidade de resolver a quíntica deriva das simetrias da equação. Se essas simetrias passarem pelo teste de Galois, por assim dizer – se elas se encaixarem de uma forma muito

---

* AEC: antes da era comum; EC: era comum; notação usada pelas ciências exatas que corresponde, grosso modo, a antes e depois de Cristo, respectivamente. Neste livro, quando não aparecer a sigla AEC em seguida à data, significa que se está falando de EC. (N.T.)

específica, que por enquanto não vou explicar –, as equações podem ser resolvidas por uma fórmula algébrica. Se as simetrias não passarem pelo teste de Galois, essa fórmula não existe.

Uma equação quíntica genérica não pode ser resolvida por uma fórmula *porque ela tem um tipo errado de simetria*.

Essa descoberta épica deu origem ao segundo tema deste livro: o *grupo* – um "cálculo de simetria" matemático. Galois partiu de uma antiga tradição matemática, a álgebra, e reinventou-a como ferramenta para o estudo da simetria.

Neste estágio do livro, palavras como "grupo" ainda são um jargão não explicado. Vou dar a explicação quando o significado dessas palavras se tornar importante para a história. Mas às vezes só precisamos de alguns termos convenientes para um inventário genérico. Se você encontrar algum jargão que não for debatido adiante, o termo estará fazendo o papel de um rótulo útil, e seu significado real não terá muita importância. Às vezes o significado surgirá logo depois, se você continuar a leitura. "Grupo" é um desses casos, mas só vamos descobrir o que significa na metade do livro.

Nossa história também fala do curioso significado de alguns números especiais na matemática. Não estou me referindo às constantes fundamentais da física, mas a constantes matemáticas como π (a letra grega pi). A velocidade da luz, por exemplo, poderia em princípio ter qualquer valor, mas, no nosso Universo, é de 300 mil quilômetros por segundo. Por sua vez, o valor de π é pouco mais de 3,14159, e nada no mundo pode alterar esse número.

A insolubilidade da equação quíntica nos diz que, assim como π, o número 5 é também muito incomum. É o menor número cujo grupo de simetria associado não passa pelo teste de Galois. Outro exemplo curioso tem relação com a sequência de números 1, 2, 4, 8. Os matemáticos descobriram uma série de extensões do conceito habitual de números "reais", chegando até os números complexos e depois até coisas chamadas quatérnions e octonions. Eles são construídos de duas cópias dos números reais, quatro cópias e oito cópias, respectivamente. Que número virá a seguir? O palpite natural seria 16, mas, na verdade, a partir daí o sistema numérico *não* é mais tão previsível. Trata-se de um fato notável e importante, pois nos fala da existência de alguma coisa especial no número 8, não no sentido superficial, mas em termos da estrutura subjacente da própria matemática.

Além dos números 5 e 8, este livro terá a participação de vários outros números, sendo que os mais notáveis são 14, 52, 78, 133 e 248. São números interessantes, que formam as dimensões dos cinco "grupos esporádicos de Lie", cuja influência permeia toda a matemática e muito da física matemática. São os principais personagens no teatro da matemática, enquanto outros números, não muito diferentes, aparecem como meros coadjuvantes.

Os matemáticos descobriram quanto esses números são especiais com o surgimento da álgebra abstrata, no final do século XIX. O que conta não são os números em si, mas o papel que desempenham nas fundações da álgebra. Associado a cada um desses números existe um objeto matemático chamado grupo de Lie, com propriedades únicas e notáveis. Esses grupos têm uma função fundamental na física moderna e parecem estar relacionados à estrutura profunda do espaço, do tempo e da matéria.

Isso nos traz ao nosso tema final: os fundamentos da física. Há muito os físicos se interrogam por que o espaço tem três dimensões e o tempo só tem uma – ou por que vivemos num espaço-tempo quadridimensional. A teoria das supercordas, a mais recente tentativa de unificar o todo da física num só conjunto de leis coerentes, vem levando os físicos a pensar se o espaço-tempo não teria outras dimensões "ocultas". Pode parecer uma ideia ridícula, mas conta com bons precedentes históricos. Talvez a presença de dimensões adicionais seja o aspecto menos contestável da teoria das supercordas.

Um aspecto muito mais controverso é a convicção de que a formulação de uma nova teoria do espaço e do tempo depende basicamente da *matemática* da teoria da relatividade e da teoria quântica, os dois pilares que sustentam a física moderna. Considera-se que a unificação dessas teorias contraditórias entre si é mais um exercício matemático do que um processo que exige experimentos novos e revolucionários. Espera-se que a beleza matemática seja um pré-requisito da verdade física. Esta pode ser uma suposição perigosa. É importante não perder de vista o mundo físico, e, seja qual for a teoria que afinal surja das deliberações atuais, ela não poderá se eximir de validações com experimentos e observações, por mais forte que seja sua linhagem matemática.

No momento, porém, existem boas razões para se adotar a abordagem matemática. Uma delas é que, até chegarmos a formular uma teoria combinada realmente convincente, ninguém sabe que experiências devem ser realizadas. Outra é que a simetria matemática tem papel fundamental tanto na relatividade como na teoria quântica, dois temas em que há poucos pontos em comum, por isso temos de dar valor a quaisquer detalhes que pudermos encontrar. As possíveis estruturas do espaço, tempo e matéria são determinadas por suas simetrias, e algumas das possibilidades mais importantes parecem estar associadas a estruturas excepcionais da álgebra. O espaço-tempo pode ter as propriedades que apresenta porque a matemática permite apenas um pequeno rol de formas especiais. Se este for o caso, faz sentido prestar atenção na matemática.

Por que o Universo parece ser tão matemático? Diversas respostas já foram propostas, mas não considero nenhuma delas muito convincente. A relação simétrica entre ideias matemáticas e o mundo físico, assim como a simetria entre o nosso sentido estético e as formas mais inerentes e importantes da matemática, é um mistério profundo e talvez insolúvel. Nenhum de nós pode dizer *por que* a beleza é verdade ou por que verdade é beleza. Só conseguimos vislumbrar a complexidade infinita dessa relação.