

Bertrand Russell

# **Introdução à filosofia matemática**

Tradução:  
Maria Luiza X. de A. Borges

Revisão técnica:  
Samuel Jurkiewicz  
*UFRJ*



**ZAHAR**

Jorge Zahar Editor

Rio de Janeiro

Título original:  
*Introduction to Mathematical Philosophy*

Tradução autorizada da edição inglesa publicada por  
Taylor & Francis Books, de Londres, Inglaterra.  
Esta obra foi originalmente publicada por George Allen & Unwin.

Copyright © 1996, Bertrand Russell Peace Foundation  
Copyright da Introdução © 1993, John G. Slater

Copyright da edição brasileira © 2007:  
Jorge Zahar Editor Ltda.  
rua México 31 sobreloja  
20031-144 Rio de Janeiro, RJ  
tel.: (21) 2108-0808 / fax: (21) 2108-0800  
e-mail: jze@zahar.com.br  
site: www.zahar.com.br

Todos os direitos reservados.  
A reprodução não-autorizada desta publicação, no todo  
ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Capa: Miriam Lerner

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte  
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

---

R925i Russell, Bertrand, 1872-1970  
Introdução à filosofia matemática / Bertrand Russell; tradução, Maria  
Luiz X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. — Rio de Janeiro:  
Jorge Zahar Ed., 2007

Tradução de: Introduction to mathematical philosophy  
ISBN 978-85-7110-970-4

1. Matemática – Filosofia. I. Título.

# Sumário

*Apresentação*, de John G. Slater 7

*Prefácio* 15

- 1 • A série dos números naturais 17
- 2 • Definição de número 28
- 3 • Finitude e indução matemática 38
- 4 • A definição de ordem 48
- 5 • Tipos de relações 62
- 6 • Similaridade das relações 73
- 7 • Números racionais, reais e complexos 85
- 8 • Números cardinais infinitos 101
- 9 • Séries infinitas e ordinais 114
- 10 • Limites e continuidade 122
- 11 • Limites e continuidade de funções 133
- 12 • Seleções e o axioma multiplicativo 144
- 13 • O axioma da infinidade e tipos lógicos 160
- 14 • Incompatibilidade e a teoria da dedução 174
- 15 • Funções proposicionais 187
- 16 • Descrições 200
- 17 • Classes 215
- 18 • Matemática e lógica 230

*Índice remissivo* 245

## *Apresentação*

RUSSELL ESCREVEU *Introdução à filosofia matemática* na prisão, durante o verão de 1918. Em janeiro daquele ano ele havia sido intimado pelas autoridades e acusado de fazer uma declaração que insultava um aliado da Grã-Bretanha em tempo de guerra. O aliado eram os Estados Unidos, e o que Russell escrevera era que os Estados Unidos provavelmente tenderiam a intimidar grevistas na Grã-Bretanha e na França depois que a guerra terminasse, “uma ocupação que o Exército norte-americano está acostumado a ter em casa”. Embora ele baseasse sua declaração num relatório do Senado dos Estados Unidos, foi julgado, condenado e sentenciado a seis meses como prisioneiro na segunda divisão. (Talvez fossem as duas frases seguintes à citada que tivessem levado as autoridades, que haviam suportado provocações de Russell durante dois anos, a processá-lo: “Não digo que estes pensamentos estejam na mente do governo. Todos os indícios tendem a mostrar que não há absolutamente nenhum pensamento na mente daqueles que ocupam os postos do Estado, e que eles vivem ao deus-dará, consolando-se com a ignorância e as tolices sentimentais.”) A perspectiva de passar seis meses na segunda divisão deixou Russell e seus amigos extremamente alarmados, temendo danos para seu intelecto; assim, pressionaram o governo para que a sentença fosse alterada pelo encarceramento na primeira divisão.

Naquele tempo as distinções de classe penetravam até as prisões. Os prisioneiros da primeira divisão pagavam aluguel pelo uso de suas celas; tinham permissão para mobiliá-las com seus

próprios móveis; estavam autorizados a contratar outro prisioneiro para lhes servir de criado; não eram submetidos ao raciocínio de comida; tinham permissão para dispor de livros e material para escrever. Todos esses privilégios eram negados aos confinados na segunda divisão. Além disso, os prisioneiros da primeira divisão tinham direito a receber mais cartas e mais visitas que os que cumpriam pena na segunda. Para seu mérito perene, Arthur Balfour, cujas pretensões e capacidades filosóficas Russell difamara, e a cujas políticas públicas opunha-se acerbamente, conseguiu que a sentença fosse alterada. Enormemente aliviado, Russell passou a planejar o melhor uso possível para sua retirada forçada do mundo.

Havia alguns anos que ele pretendia escrever um livro-texto de lógica. Tinha aguda consciência de que *Principia Mathematica*, apesar de sua reconhecida importância, tinha muito poucos leitores; estava convencido, no entanto, de que, se novos filósofos o compreendessem, enfrentariam os problemas filosóficos de maneira muito mais profícua do que costumavam fazer. O mais importante nos *Principia* para efetuar essa revolução são seus conceitos básicos que, Russell estava convencido, podem ser apreendidos independentemente da massa de símbolos em que estão inseridos naquele livro. Na iminência da prisão, ele decidiu que chegara o momento de levar a cabo seu projeto. O plano amadurecido requeria dois livros: o primeiro, um “Prelúdio aos *Principia*”; o segundo, uma meticulosa reelaboração de “A filosofia do atomismo lógico”. Como a primeira parte do projeto era simplesmente uma introdução aos *Principia*, nenhuma pesquisa adicional se faria necessária. Ele precisaria apenas organizar o material que tinha na cabeça e pô-lo no papel.

Nos meses que precederam imediatamente sua intimação, Russell havia proferido duas séries de conferências em Londres

para públicos pagantes. A primeira delas abrangeu o mesmo terreno que *Introdução à filosofia matemática*; a segunda tornou-se famosa como “A filosofia do atomismo lógico”. Não existe nenhum manuscrito ou texto datilografado da primeira série de conferências; um estenógrafo registrou a segunda, tal como pronunciada, incluindo as discussões que se seguiram, e esse texto datilografado foi editado por Russell e outros para publicação numa revista. O primeiro conjunto, que tratava de assuntos muito conhecidos, provavelmente não diferia em substância do texto deste livro. Depois que Russell se decidia por uma maneira de explicar uma idéia, invariavelmente perseverava nela.

Em 1º de maio de 1918, o apelo de Russell contra a sentença de prisão foi rejeitado, e nesse mesmo dia ele ingressou na prisão Brixton. Ficou decepcionado quando as autoridades lhe ordenaram pegar um táxi; alimentara a esperança de que providenciarão seu transporte num camburão. Em sua *Autobiografia*, rememorou a recepção que teve no portão da penitenciária:

Fui muito confortado, ao chegar, pelo carcereiro no portão, que havia obtido informações sobre mim. Perguntou minha religião e respondi “agnóstico”. Pediu-me que soletrasse a palavra e comentou, com um suspiro: “Bem, há muitas religiões, mas suponho que todas cultuam o mesmo Deus.” Esse comentário me manteve de bom humor por cerca de uma semana.

Antes de ser encarcerado, ele havia traçado seu plano de trabalho: quatro horas de escrita filosófica por dia, quatro horas de leitura filosófica e quatro horas de leituras gerais. Na segunda-feira, 6 de maio, porém, ainda não tinha livros nem material para escrever. Havia, contudo, mobiliado sua cela com uma cama e outros móveis enviados pelo irmão, a quem escreveu nesse dia: “Espero logo ter material para escrever: então redigirei primeiro

um livro chamado *Introdução à lógica moderna*, e quando ele estiver terminado começarei uma obra ambiciosa que deverá se chamar *Análise da mente*. As condições aqui são boas para a filosofia.” Mais adiante, na mesma carta, pediu ao irmão que transmitisse esse recado: “Diga a Whitehead que quero escrever um livro-texto para os *Principia* e lerei tudo o que ele considerar relevante.”

Em 21 de maio Russell enviou uma mensagem a H. Wildon Carr, na época secretário honorário da Aristotelian Society, que estava atuando temporariamente como seu agente literário: “Escrevi cerca de 20 mil palavras da *Introdução à filosofia matemática*, para desenvolver as conferências dadas *antes* do Natal. Depois trabalhei sobre as conferências dadas *depois* do Natal (que tenho, obrigado).” Mais adiante, na carta, retornou ao livro: “Espero terminar a *Introdução* dentro de mais ou menos um mês. A prisão é um bom lugar para leituras e trabalho fácil, mas seria impossível para um pensamento realmente difícil.” Apenas seis dias depois, numa carta ao irmão, Russell incluiu outro recado para Carr: “Quase terminei a *Introdução à filosofia matemática*, um prelúdio de 70 mil palavras aos *Principia*.” Passou então a mencionar várias questões filosóficas para as quais precisava encontrar respostas defensáveis antes de se achar em condições de escrever o segundo livro projetado. Este, que se chamaria *Elementos de lógica*, “proporá a base lógica do que chamo de ‘atomismo lógico’ e situará a lógica em relação à psicologia, matemática etc.”. Pretendia tratar de muitas das questões filosóficas que o estavam perturbando em um outro projeto de livro, *Análise da mente*, e o trabalho preliminar sobre ele consumiu o restante de seu tempo na prisão. Esse livro foi publicado em 1921.

Numa carta anterior ao irmão, em 16 de maio, Russell descreveu *Elementos de lógica* como essencial para a compreensão das idéias a serem desenvolvidas em *Análise da mente*:

Continuarei com minha *Análise da mente*, que, caso bem-sucedida, deveria ser mais uma obra extensa e importante. Ela deverá

se complementar com um livro sobre lógica: não o que estou fazendo agora, que deve ser um livro-texto, mas outro, na linha das conferências que dei depois do Natal: sem tal complemento, seria praticamente ininteligível. Prevejo pelo menos três anos de trabalho sobre esse tema.

É uma pena que ele não tenha reelaborado “A filosofia do atomismo lógico” em *Elementos de lógica*; essas conferências foram citadas com muita freqüência nos anos entre as guerras, apesar de disponíveis apenas numa revista; parece provável que teriam sido ainda mais amplamente estudadas, e assim mais influentes, se fossem mais facilmente disponíveis, sob forma revista e ampliada, num livro. “A filosofia do atomismo lógico” foi reproduzida no volume 8 de *The Collected Papers of Bertrand Russell*.

Em suas discussões da *Introdução à filosofia matemática*, Russell descreve a obra por vezes como uma introdução aos *Principia*, como foi mencionado, e por vezes como “uma versão semipopular de *Os princípios da matemática*”, como o faz em sua *Autobiografia*. Talvez esta última descrição seja um mero lapso. *Principios*, em retrospecto histórico, foi a primeira afirmação que Russell fez da tese de que grande parte da matemática é um ramo da lógica, tese que ele e Alfred Whitehead desenvolveram elaboradamente nos *Principia Mathematica*. (*Principios*, porém, é muito mais que isso, pois contém extensas e importantes discussões da maior parte das questões metafísicas tradicionais.) Os três livros, portanto, são obviamente relacionados, mas *Introdução à filosofia matemática* está tão completamente imbuído das idéias centrais dos *Principia* que parece quase descabido falar dele como mais estreitamente relacionado aos *Principios*. Para citar apenas um exemplo: a teoria das descrições de Russell, que só foi publicada dois anos depois do lançamento de *Principios*, é objeto de um capítulo inteiro na *Introdução*.



O manuscrito da *Introdução à filosofia matemática* encontra-se agora nos Russell Archives, na McMaster University, em Hamilton, em Ontário. O diretor da prisão foi obrigado a lê-lo para verificar se continha alguma coisa proibida pelos regulamentos do tempo de guerra, mas, supomos que com grande alívio, delegou a tarefa a Carr. Este lhe assegurou que a obra era o que seu título indicava e que nada continha de subversivo. Uma vez fora da prisão, o manuscrito foi entregue à datilógrafa costureira de Russell, a senhorita Kyle, para que preparasse uma cópia para os tipógrafos. Numa carta de 29 de julho ao irmão, Russell expressou certa irritação com o atraso da datilografia: “Diga à senhorita Kyle para se apressar com a *Introdução à filosofia matemática* — ela está com o livro há *realmente* muito tempo.” As cartas que enviou da prisão não registram a data em que apresentou o livro ao diretor para exame, mas presumivelmente foi no início de junho, pois o livro tem menos de 80 mil palavras. O manuscrito foi finalmente devolvido a Russell e ele o deu de presente a lady Constance Malleson, com quem mantinha um caso na época. Antes de sua morte, em 1975, ela o vendeu ao Russell Archives com todos os outros materiais de Russell que possuía. Uma inspeção desse manuscrito mostra claramente que Russell seguiu seu próprio conselho de fazer todas as mudanças em seu texto na própria cabeça e depois simplesmente redigir a forma final. Há muito poucas alterações em seu manuscrito e absolutamente nenhuma tentativa de formulação foi cancelada.

Num ponto do livro, Russell alude às condições adversas sob as quais ele foi escrito. No início do Capítulo 16, adverte o leitor de que o artigo definido exige dois capítulos: um para o significado do singular *o* e outro para o do plural *os*.

Pode ser considerado excessivo dedicar dois capítulos a uma palavra, mas para o matemático filosófico essa é uma palavra de gran-

de importância: como o gramático de Browning\* com o enclítico δε, eu enunciaria a doutrina dessa palavra se estivesse “morto da cintura para baixo”, e não meramente numa prisão.

Carr talvez tenha desviado os olhos ao topar com essa passagem.

A melhor descrição dos conteúdos deste livro e de seu nível de dificuldade foi escrita pelo próprio Russell como publicidade para a primeira edição. O texto apareceu apenas na sobrecapa da primeira impressão da primeira edição; já na segunda impressão, foi substituído por um trecho de uma crítica entusiástica publicada no *Athenaeum*.

Este livro destina-se aos que não têm conhecimento prévio dos tópicos de que trata e nem outras noções de matemática além das adquiridas na escola primária ou mesmo em Eton. Ele expõe de forma elementar a definição lógica de número, a análise da noção de ordem, a doutrina moderna do infinito e a teoria das descrições e classes como ficções simbólicas. Os aspectos mais controversos e incertos da matéria são subordinados àqueles que podem agora ser considerados conhecimento científico adquirido. Esses são explicados sem o uso de símbolos, mas de maneira a dar aos leitores uma compreensão geral dos métodos e objetivos da lógica matemática, que, como se espera, será do interesse não só dos que desejam avançar para um estudo mais sério da matéria, como daquele círculo mais amplo que sente um desejo de conhecer os procedimentos dessa importante ciência moderna.

A maliciosa referência de Russell a Eton provavelmente deixou Stanley Unwin constrangido, e, na primeira oportunidade,

---

\* Alusão ao poema “A Grammarian’s Funeral” de Robert Browning (1812-89). (N.T.)

ele parou de usar essa descrição. Mas ela é tão quintessencialmente russelliana que merece ser muito mais conhecida do que foi até agora. Exceto por sua avaliação do preparo exigido do leitor, que certamente se pode questionar, o restante do texto descreve realmente com precisão do que trata o livro. Mas este é um livro para ser estudado, não meramente lido. Os que o estudarem cuidadosamente emergirão com uma boa apreensão da filosofia matemática de Russell e terão se preparado para enfrentar seus livros e ensaios mais técnicos, em que suas contribuições originais para a lógica matemática tinham sido publicadas anteriormente. Somente assim poderão experimentar o gênio de Russell para o trabalho original (em contraposição à mera exposição) em primeira mão.

JOHN G. SLATER  
*Universidade de Toronto*